BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2008

RİYAZİYYAT

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА. II.

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, М.Н.ГЕЙДАРОВА
Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности решения почти всюду одномерной смешанной задачи с граничными условиями типа Рикье для полулинейных бипараболических уравнений четвёртого порядка. Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ *по системе* $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ *искомого решения* $u(t,x)$. *Далее, доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучаются вопросы существования и единственности решения почти всюду следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0\le t\le T, 0\le x\le \pi), \qquad (1) \\ u(0,x)=\varphi(x) \quad (0\le x\le\pi), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \quad (0\le x\le\pi), \qquad (2) \\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0 \quad (0\le t\le T), \qquad (3) \end{cases}$$

где $0<T<+\infty$; F,φ,ψ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi])$;
$u_{xxxx}(t,x),u_{txx}(t,x),u_{tt}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi))$;

б) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$;

в) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле.

§1. Вспомогательные факты.

С целью исследования решения почти всюду задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое решение почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\sin nx dx \ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \tag{5}$$

Тогда, после применения схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n(t)=(1+n^2t)\cdot e^{-n^2t}\cdot\varphi_n+te^{-n^2t}\cdot\psi_n+\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}\mathsf{F}(u(\tau,x))\sin nx\cdot(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}\,dxd\tau$$

$$(n=1,2,...;\ t\in[0,T]), \tag{6}$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx\ ,\quad \psi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx dx\ \ (n=1,2,...), \tag{7}$$

$$\mathsf{F}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)). \tag{8}$$

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6).

3. В данной работе, с целью изучения вопроса существования решения почти всюду задачи (1)-(3), систему (6), при предположениях

$$\mathsf{F}(u(t,x))\in C([0,T]\times[0,\pi]),\ \frac{\partial}{\partial x}\{\mathsf{F}(u(t,x))\}\in C([0,T];L_2(0,\pi)) \tag{9}$$

и

$$\{\mathsf{F}(u(t,x))\}_{x=0}=\{\mathsf{F}(u(t,x))\}_{x=\pi}=0\qquad\forall t\in[0,T], \tag{10}$$

после интегрирования по частям по x один раз в правой части (6), преобразуем к виду:

$$u_n(t)=(1+n^2t)\cdot e^{-n^2t}\cdot\varphi_n+te^{-n^2t}\cdot\psi_n+\frac{2}{\pi n}\int_0^t\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\{\mathsf{F}(U(t,x))\}\cdot\cos nx\cdot(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}\,dxd\tau$$

$$(n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \tag{11}$$

4. Обозначим через $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (4), рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$\mathrm{J}_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty\,,$$

где $l\ge 0$ - целое число, $\alpha_i\ge 0$ $(i=\overline{0,l})$, $1\le\beta_i\le 2$ $\quad(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=\mathrm{J}_T(u)$. Известно (см. [1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x)\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,t}}\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\quad(0\le t\le T)\,. \tag{12}$$

5. Для функции $u(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовём её n- той компонентой. Пусть 💣- любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$. Совокупность n-тых компонент всех функций из 💣 обозначим через 💣$_n$. Справедлива (см.[1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества 💣$\subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого фиксированного n $(n=1,2,\dots)$ множество 💣$_n$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

б) для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $u(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in$ 💣, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon\qquad\forall u\in\text{💣}.$$

6. Очевидно, что если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{k}_{2,T}$ $(k\ge 1$ - целое число), то $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|_{B^{k-1}_{1,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \cdot \max_{0\le\tau\le t} |u_n(\tau)| \le \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^k \cdot \max_{0\le\tau\le t} |u_n(\tau)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B^k_{2,t}}. \tag{13}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\forall u \in B^{i,j}_{2,2,T} \qquad \|u\|_{B^{i-1,j-1}_{1,\ 1,\ t}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B^{i,j}_{2,2,t}} \qquad (i,j \ge 1; 0 \le t \le T). \tag{14}$$

7. Пусть для натурального числа k:

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0,\pi]), \quad \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0,\pi), \ \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \qquad \left(s = \overline{0, \left[\frac{k-1}{2}\right]} \right). \tag{15}$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечётного k) и равенством Парсеваля (для чётного k), легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k \cdot \varphi_n)^2 \le \frac{2}{\pi} \cdot \left\| \varphi^{(k)}(x) \right\|^2_{L_2(0,\pi)}, \tag{16}$$

где φ_n $(n = 1,2,...)$ определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (16) верна и при $k = 0$, если $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$.

§2. Исследование единственности решения почти всюду задачи (1)-(3).

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_6) \in C\left([0,T] \times [0,\pi] \times (-\infty,\infty)^6\right)$.

2. $\forall R > 0$ в $[0,T] \times [0,\pi] \times [-R,R]^6$

$$\left| F(t,x,u_1,...,u_6) - F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_6) \right| \le C_R \cdot \sum_{i=1}^{6} \left| u_i - \widetilde{u}_i \right|, \tag{17}$$

где $C_R > 0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

§3. Исследование существования в малом решения почти всюду задачи (1)-(3).

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е.справедливая при достаточно малых значениях T) решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi^{(4)}(x) \in L_2(0,\pi)$ и $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$;

$\psi(x)\in C^{(1)}([0,\pi]),\ \psi''(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=0$.

2. $F(t,\xi_0,\ldots,\xi_6),\ F_{\xi_i}(t,\xi_0,\ldots,\xi_6)\ (i=\overline{0,6})\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.

3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0\quad \forall t\in[0,T],\xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Доказательство. Для каждого фиксированного $u\in B^{3,1}_{1,1,T}$ определим в $B^{4,2}_{2,2,T}$ оператор (относительно V) Φ_u:

$$\Phi_u(V(t,x))=\widetilde{V}(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{V}_n(t)\sin nx, \tag{18}$$

где

$$\widetilde{V}_n(t)=(1+n^2t)\cdot e^{-n^2t}\cdot\varphi_n+te^{-n^2t}\cdot\psi_n+$$
$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^t\int_0^\pi \mathcal{F}_u(V(\tau,x))\cos nx\cdot(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}\,dx\,d\tau\qquad (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T])\ , \tag{19}$$

числа $\varphi_n,\psi_n\quad(n=1,2,\ldots)$ определены соотношением (7),

$$\mathcal{F}(V(t,x))=G(u(t,x))+g_4(u(t,x))\cdot V_{xxxx}(t,x)+g_6(u(t,x))\cdot V_{txx}(t,x), \tag{20}$$

$$G(u(t,x))=g_0(u(t,x))+g_1(u(t,x))\cdot u_x(t,x)+g_2(u(t,x))\cdot u_{xx}(t,x)+$$
$$+g_3(u(t,x))\cdot u_{xxx}(t,x)+g_5(u(t,x))\cdot u_{tx}(t,x), \tag{21}$$

$$g_i(u(t,x))\equiv F_{\xi_i}(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x))\ \left(i=\overline{0,6}\right), \tag{22}$$

причём $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6$- обозначения соответствующих аргументов функции $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)$.

Очевидно, что

$$\forall u\in B^{4,2}_{2,2,T}\quad \mathcal{F}_u(u(t,x))=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathrm{F}(u(t,x))\right\}, \tag{23}$$

где оператор F определён соотношением (8).

Из (19) получаем, что при любом фиксированном $u\in B^{3,1}_{1,1,T}$ $\forall V\in B^{4,2}_{2,2,T}$:

$$\left\|\Phi_u(V)\right\|^2_{B^{4,2}_{2,2,T}}\equiv\left\|\widetilde{V}\right\|^2_{B^{4,2}_{2,2,T}}\le a_0+b_0\cdot\int_0^T\int_0^\pi\left\{\mathcal{F}_u(V(\tau,x))\right\}^2dx\,d\tau, \tag{24}$$

где

$$a_0\equiv 12\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\cdot\varphi_n\right)^2+12\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\cdot\psi_n\right)^2;\ b_0\equiv\frac{39}{\pi}, \tag{25}$$

причём конечность a_0 следует из (16) (для $k=4$ и $k=2$).

Далее, в силу структуры пространства $B^{3,1}_{1,1,T}$, $\forall\tau\in[0,T]$ имеем:

$$\left\|u_{x^i\tau^j}(\tau,x)\right\|_{C([0,\pi])}\le\|u\|_{B^{3,1}_{1,1,\tau}}\qquad(0\le i+2j\le3). \tag{26}$$

Кроме того, при любом $V \in B^{4,2}_{2,2,T}$ $\forall \tau \in [0,T]$:

$$\int_0^{\pi} V^2_{xxxx}(\tau,x)dx \le \frac{\pi}{2}\cdot \|V\|^2_{B^{4,2}_{2,2,\tau}}, \quad \int_0^{\pi} V^2_{\tau xx}(\tau,x)dx \le \frac{\pi}{2}\cdot \|V\|^2_{B^{4,2}_{2,2,\tau}}. \tag{27}$$

Теперь, пользуясь условием 2 данной теоремы, явными выражениями $G(u(t,x)), g_i(u(t,x))$, определёнными соотношениями (21) и (22), и оценками (26), легко получить, что $\forall u \in B^{3,1}_{1,1,T}$:

$$\|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u) \ (i=\overline{0,6}), \tag{28}$$

$$\|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u)\cdot \left(1+4\|u\|_{B^{3,1}_{1,1,T}}\right), \tag{29}$$

где $Q_T \equiv [0,T]\times[0,\pi]$ и

$$C(u) \equiv \max_{i=\overline{0,6}} \left\{ \left\| F_{\zeta_i}\left(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)\right)\right\|_{C(Q_T)} \right\}. \tag{30}$$

Таким образом, из (24), пользуясь оценками (28),(29),(27) и соотношением (20), получаем, что при любом фиксированном $u \in B^{3,1}_{1,1,T}$ $\forall V \in B^{4,2}_{2,2,T}$:

$$\|\mathcal{A}_u(V)\|^2_{B^{4,2}_{2,2,T}} \le a_0 + b_0\cdot\left[3\pi T\cdot C^2(u)\cdot\left(1+4\|u\|_{B^{3,1}_{1,1,T}}\right)^2 + 3\pi T\cdot C^2(u)\cdot\|V\|^2_{B^{4,2}_{2,2,T}}\right]. \tag{31}$$

Из (31) следует, что для любого фиксированного $u \in B^{3,1}_{1,1,T}$ оператор $\mathcal{A}_u$ действует в $B^{4,2}_{2,2,T}$, причём ограниченно.

Теперь, пользуясь соотношениями (18),(19),(20), оценками (28), (29) и (27) (для $V = V_1 - V_2$), аналогично (24) получаем, что при любом фиксированном $u \in B^{3,1}_{1,1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^{4,2}_{2,2,T}$ и $t\in[0,T]$:

$$\|\mathcal{A}_u(V_1)-\mathcal{A}_u(V_2)\|^2_{B^{4,2}_{2,2,t}} \le b_0\cdot \int_0^t\int_0^{\pi} \left\{\mathcal{K}_u(V_1(\tau,x)) - \mathcal{K}_u(V_2(\tau,x))\right\}^2 dxd\tau \le$$

$$\le 78C^2(u)\cdot\int_0^t \|V_1-V_2\|^2_{B^{4,2}_{2,2,\tau}}d\tau \le 78C^2(u)\cdot\|V_1-V_2\|^2_{B^{4,2}_{2,2,T}}\cdot t,$$

. . . .

$$\|\mathcal{A}_u(V_1)-\mathcal{A}_u(V_2)\|^2_{B^{4,2}_{2,2,t}} \le \left\{78C^2(u)\right\}^k\cdot\|V_1-V_2\|^2_{B^{4,2}_{2,2,T}}\cdot\frac{t^k}{k!}, \tag{32}$$

где k - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B^{3,1}_{1,1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^{4,2}_{2,2,T}$:

$$\|\mathcal{A}_u(V_1)-\mathcal{A}_u(V_2)\|_{B^{4,2}_{2,2,T}} \le q_k(u)\cdot\|V_1-V_2\|_{B^{4,2}_{2,2,T}}, \tag{33}$$

где

$$q_k(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}}\cdot\left(78T\cdot C^2(u)\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{34}$$

Очевидно, что для достаточно больших $k = k_u$: $q_k(u) < 1$. Для таких k оператор $\wp_u^k$ оказывается сжатым в пространстве $B_{2,2,T}^{4,2}$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B_{2,2,T}^{4,2}$ неподвижная точка V оператора $\wp_u^k$ является и единственной в $B_{2,2,T}^{4,2}$ неподвижной точкой оператора $\wp_u$:

$$V = \wp_u(V), \quad V \in B_{2,2,T}^{4,2}. \tag{35}$$

Сопоставив каждому $u \in B_{1,1,T}^{3,1}$ единственную в $B_{2,2,T}^{4,2}$ неподвижную точку V оператора $\wp_u$ порождаем оператор H:

$$H(u) = V = \wp_u(V), \tag{36}$$

действующий из $B_{1,1,T}^{3,1}$ в $B_{2,2,T}^{4,2}$.

Далее, показывается, что оператор H действует из $B_{1,1,T}^{3,1}$ в $B_{2,2,T}^{4,2}$ непрерывно и, тем более, он действует в $B_{1,1,T}^{3,1}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B_{1,1,T}^{3,1}$. Пусть $K = K_R$ - любой замкнутый шар пространства $B_{1,1,T}^{3,1}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда, в силу (26), очевидно, что при любом $u \in K_R$ $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x) \le R. \tag{37}$$

Тогда очевидно, что

$$\forall u \in K_R \quad \|g_i(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R \ (i = \overline{0,6}), \ \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R, \tag{38}$$

где $C_R > 0$ - постоянная, а операторы g_i $(i = \overline{0,6})$ и G определены соотношениями (22) и (21).

Пользуясь оценками (38),(27) и соотношениями (18)-(22), аналогично (24) получаем, что при любом $u \in K_R$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,2,t}^{4,2}}^2 \equiv \|V\|_{B_{2,2,t}^{4,2}}^2 \equiv \|\wp_u(V)\|_{B_{2,2,t}^{4,2}}^2 \le a_0 + b_0 \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\wp_u(V(\tau,x))\}^2 \, dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + 117T \cdot C_R^2 + 117 \cdot C_R^2 \cdot \int_0^t \|V\|_{B_{2,2,\tau}^{4,2}}^2 d\tau, \tag{39}$$

где числа a_0 и b_0 определены соотношением (25).

Из (39), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in K_R$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{4,2}}^2 \equiv \|V\|_{B_{2,2,T}^{4,2}}^2 \le \left(a_0 + 117T \cdot C_R^2\right) \cdot \exp\left\{117 C_R^2 \cdot T\right\} \equiv a_R^2. \tag{40}$$

Следовательно, множество $H(K_R)$ ограничено в $B_{2,2,T}^{4,2}$.

Далее, показывается, что $\forall u \in$ 😐$_R$:

$$\left\|(H(u))_{tt}\right\|^2_{B^0_{2,T}} \equiv \left\|V_{tt}\right\|^2_{B^0_{2,T}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{0\le t\le T}\left|V''_n(t)\right|\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\cdot\varphi_n\right)^2 +$$

$$+16\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\cdot\psi_n\right)^2 + 4(\pi^2+33T)\cdot C_R^2\cdot\left(1+a_R^2\right) \equiv b_R^2. \qquad (41)$$

Таким образом, из оценок (40) и (41) следует, что $\forall u \in$ 😐$_R$:

$$\left\|H(u)\right\|_{B^{4,2,0}_{2,2,2,T}} = \left\|H(u)\right\|_{B^{4,2}_{2,2,T}} + \left\|(H(u))_{tt}\right\|_{B^0_{2,T}} \le a_R + b_R \equiv c_R. \qquad (42)$$

Следовательно, множество $H($😐$_R)$ ограничено в $B^{4,2,0}_{2,2,2,T}$. Отсюда, по теореме 1, следует, что множество $H($😐$_R)$, рассматриваемое как подмножество пространства $B^{3,1}_{1,1,T}$, компактно в $B^{3,1}_{1,1,T}$. Таким образом, оператор H действует в $B^{3,1}_{1,1,T}$ компактно. Так как оператор H действует в $B^{3,1}_{1,1,T}$ и непрерывно, то он действует в $B^{3,1}_{1,1,T}$ вполне непрерывно.

Далее, в силу оценок (14) (для $i=4, j=2$) и (40), $\forall u \in$ 😐$_R$ имеем:

$$\left\|H(u)\right\|_{B^{3,1}_{1,1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\left\|H(u)\right\|_{B^{4,2}_{2,2,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot a_R = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\left\{a_0 + 117T\cdot C_R^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{\frac{117}{2}\cdot C_R^2\cdot T\right\}, \qquad (43)$$

где числа a_0 и C_R определены соотношениями (25) и (38).

Из (43) видно, что если число

$$R > \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{a_0} \qquad (44)$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T

$$\forall u \in \text{😐}_R \quad \left\|H(u)\right\|_{B^{3,1}_{1,1,T}} \le R,$$

т.е. $H($😐$_R) \subset$ 😐$_R$.

Таким образом, для любого фиксированного R, удовлетворяющего условию (44), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар 😐$_R$ в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в ➯$_R$ по крайней мере одну неподвижную точку $u: u = H(u)$. Так как $u = H(u) = V =$ ✍$_u(V)$, то $u = V$ и, следовательно, $u = H(u) =$ ✍$_u(V)$, причём, в силу (42), $u(t,x) \in B^{4,2,0}_{2,2,2,T}$.

Далее, в силу $u = V$ и (23), для найденной неподвижной точки $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$ функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (11). Пользуясь этим, показывается, что функция

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{4,2,0}_{2,2,2,T} \tag{45}$$

является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

§4. Первая априорная оценка для решений почти всюду задачи (1)-(3).

В этом параграфе стандартным методом, т.е. умножением рассматриваемого уравнения на подходящую функцию и последующим соответствующим почленным интегрированием (включая некоторые интегрирования по частям), доказана следующая теорема об априорной ограниченности (в определённом смысле) решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть первая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})=$$
$$=f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})+f_0(x,u)+f_1(t,u_t)\cdot u_{tx}+\left(f_2(x,u_x)\right)_x, \tag{46}$$

причём

а) $f_0(x,u)\in C([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x\in[0,\pi],\ u\in(-\infty,\infty)$

$$\int_0^u f_0(x,\xi)d\xi\equiv g_0(x,u)\le C\cdot(1+u^2); \tag{47}$$

б) $f_1(t,V)\in C([0,T]\times(-\infty,\infty))$; (48)

в) $f_2(x,V)\in C^{(1)}([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x\in[0,\pi],\ u\in(-\infty,\infty)$

$$-\int_0^V f_2(x,\xi)d\xi\equiv g_2(x,V)\le C+\delta\cdot V^2,\ \ 0\le\delta<\frac{1}{2\pi^2}; \tag{49}$$

г) $f(t,x,u_1,...,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$ и в $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$f(t,x,u_1,...,u_6)\cdot u_5\le C\cdot\left(1+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_5^2\right)+\delta_0\cdot u_6^2,\ \ 0\le\delta_0<2, \tag{50}$$

где $C>0$ - постоянная.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^\pi u_t^2(t,x)dx\le C_0,\ \int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx\le C_0\ \ \forall t\in[0,T];\ \int_0^T\int_0^\pi u_{tx}^2(t,x)dxdt\le C_0. \tag{51}$$

§5. Вторая априорная оценка для решений почти всюду задачи (1)-(3).

В этом параграфе, пользуясь априорными оценками (51), доказана следующая теорема о более сильной, чем (51), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 5. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 4.

2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^2\times(-\infty,\infty)^4$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_6)\right|\le C_R\cdot\left\{1+|u_3|\cdot\left(|u_3|+|u_3|\cdot|u_5|+u_5^2+|u_6|\right)+\right.$$

$$+|u_4|\cdot(1+|u_5|)+|u_5|^3+|u_5|\cdot|u_6|+|u_6|\Big\}, \qquad (52)$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t,x)\|_{B^{3,1}_{2,2,T}}\le C_0\,. \qquad (53)$$

§6. Третья априорная оценка для решений почти всюду задачи (1)-(3).

В этом параграфе, пользуясь априорной оценкой (53), доказана следующая теорема о более сильной, чем (53), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 6. Пусть

1. Выполнены условия 2 и 3 теоремы 3.

2. Выполнены все условия теоремы 5.

3. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right|\le C_R\cdot\left(1+\xi_4^2+\xi_6^2\right)\ \ (i=0,1,2), \qquad (54)$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right|\le C_R\cdot\left(1+|\xi_4|+|\xi_6|\right)\ \ (i=3,5), \qquad (55)$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right|\le C_R\ \ (i=4,6), \qquad (56)$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t,x)\|_{B^{4,2}_{2,2,T}}\le C_0\,. \qquad (57)$$

§7. Исследование существования в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

В этом параграфе, пользуясь теоремами 3 и 6, доказана следующая теорема о существовании в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 7. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. Выполнены все условия теоремы 4.

3. Выполнено условие 2 теоремы 5.

4. Выполнено условие 4 теоремы 6.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду.

Замечание. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ [1]-[3], в которых изучены вопросы существования и единственности обобщённого решения задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гейдарова М.Н., Худавердиев К.И. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка. I., Бакинский Государственный Университет, Баку, 2006 г., 46 с. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ 13.07.06, №2789-Аз.).

2. Гейдарова М.Н. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для бипараболических уравнений четвёртого порядка. Тезисы научной конференции, посвящённой 70-летию члена корреспондента НАН Азербайджана, профессора Б.А.Искендерова, Баку, 17 мая 2006 г., с.67.
3. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка. I., Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2007 г., №1, с.5-14.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ BİPARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN TƏDQİQİ. II.

K.İ.XUDAVERDİYEV, M.N.HEYDƏROVA

XÜLASƏ

İş dördüncü tərtib yarım-xətti biparabolik tənlik üçün birölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinə tərif verilir. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra baxılan məsələnin həlli axtarılan $u(t,x)$ həllinin $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminə görə naməlum $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ Furye əmsallarına nəzərən müəyyən qeyri-xətti hesabi inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra isə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin qlobal yeganəliyi, lokal və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.

STUDY OF ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR FOURTH ORDER BIPARABOLIK EQUATION. II.

K.I.KHUDAVERDIYEV, M.N.HAYDAROVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for a semi-linear fourth order biparabolik equation. Conseption of almost everywhere solution for mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integro-differential equations in unknown Fourier coefficients $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ of the sought solution $u(t,x)$ based on the system $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Besides, uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the almost everywhere solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.